JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 15, 188-201 (1974)

Sur la Classification des Systèmes Dynamiques non Commutatifs

DANG-NGOC-NGHIEM*

Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Tour 46-56, 9, quai Saint Bernard, Paris 5è, France

Communicated by J. Dixmier

Received April 10, 1973

The purpose of this paper is to extend certain results on commutative dynamical systems and on von Neumann algebras (provided with their inner automorphism groups) to general dynamical systems: "decompositions" into finite, semifinite, properly infinite, purely infinite, discrete and continuous systems; induced systems, system extensions, properties of invariant weights, etc.

1. Introduction et Notations

Le but de ce travail est d'étendre des résultats obtenus sur les systèmes dynamiques commutatifs et sur les W^*-algèbres (munies de leur groupe d'automorphismes intérieurs) à des systèmes dynamiques généraux.

Dans la partie 2, nous généralisons les notions de systèmes finis, semi-finis, proprement infinis, purement infinis, discrets, continus et montrons les théorèmes de décomposition d'un système général.

Dans la partie 3, nous donnons une généralisation du théorème de Kovács et Szücs sur l'existence et l'unicité d'une espérance conditionnelle invariante pour un système dynamique général; nous montrons quelques propriétés essentielles de cette espérance conditionnelle en particulier ses relations avec les systèmes dynamiques induits et les extensions de systèmes dynamiques. Nous étudions aussi les propriétés des poids normaux semi-finis invariants, nous caractérisons ceux dont la restriction à l'algèbre des éléments invariants est semi-finie. Nous montrons qu'une extension finie d'un système dynamique est finie

* Équipe de Recherche n° 1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématiques Informatique" associée au C.N.R.S.

(resp. semi-finie, proprement infinie, purement infinie) si et seulement si le système initial possède la propriété correspondante; il en résulte en particulier les théorèmes de von Neumann et de Krieger sur les constructions des W^*-algèbres associées aux systèmes dynamiques commutatifs.

Enfin, comme applications, nous donnons une nouvelle démonstration d'un théorème de Takesaki et Tomiyama sur la caractérisation des W^*-algèbres finies.

Notations

Soit $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}, G)$ un système dynamique, i.e., un couple formé d'une W^*-algèbre $\mathfrak{A}$ et d'un groupe G de $*$-automorphismes de $\mathfrak{A}$; on note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ le groupe des $*$-automorphismes de $\mathfrak{A}$, $\mathrm{Int}(\mathfrak{A})$ le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{A}$; sur $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ les quatre topologies de la convergence simple faible, ultrafaible, forte et ultraforte coincïdent, on les appelle la topologie ultrafaible de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$; on note $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ le groupe des unitaires de $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A}$ est réalisée sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, on note $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}(\mathfrak{A}) = \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \mid u$ unitaire, $u\mathfrak{A}u^* = \mathfrak{A}\}$; si $u \in \mathscr{U}_{\mathscr{H}}(\mathfrak{A})$ on définit $i_u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ $i_u(\cdot) = u \cdot u^*$; on désigne par $\mathfrak{A}^G$ ou $\mathscr{I}_G$ ou simplement $\mathscr{I}$ la sous-W^*-algèbre des éléments invariants de $\mathfrak{A}$.

On note $G(\mathfrak{A})$ le centre de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_*{}^G = \{\varphi \in \mathfrak{A}_* \mid \varphi g = \varphi, \forall g \in G;\}$ si $\mathscr{B}$ est une sous-W^*-algèbre de $\mathfrak{A}$, e un projecteur de $\mathfrak{A}$, on désigne par $\mathscr{B}$-support de e le plus petit projecteur de $\mathscr{B}$ majorant e.

Soit φ un poids normal sur $\mathfrak{A}$, on note

$$\mathscr{N}_\varphi = \{x \in \mathfrak{A} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}; \qquad N_\varphi = \{x \in \mathfrak{A} \mid \varphi(x^*x) = 0\};$$

$$\mathfrak{A}_\varphi{}^+ = \{x \in \mathfrak{A}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}; \qquad \mathfrak{A}_\varphi = \mathscr{N}_\varphi^*\mathscr{N}_\varphi\,; \qquad \mathrm{Supp}\,\varphi = \text{support de } \varphi.$$

Si $\mathscr{M}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{A}$, on note $G_{\mathscr{M}} = \{i_u \mid u \text{ unitaire}, u \in \mathscr{M}\}$.

2. Quelques Types de Systèmes Dynamiques

Premiers types de systèmes dynamiques

Définition 1. Soit $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}; G)$ un système dynamique

(a) $\mathscr{F}$ est dit *fini* si pour tout projecteur non nul e de $\mathfrak{A}$, il existe un état normal invariant φ tel que $\varphi(e) \neq 0$.

(b) $\mathscr{F}$ est dit *semi-fini* si pour tout projecteur non nul e de $\mathfrak{A}$, il existe un poids normal semi-fini invariant φ tel que $\varphi(e) \neq 0$.

(c) $\mathscr{F}$ est dit *proprement infini* (resp. *purement infini*) s'il n'existe aucun état normal (resp. poids normal semi-fini) invariant.

(d) $\mathscr{F}$ est dit *infini* s'il n'est pas fini.

DÉFINITION 2. Soit e un projecteur de $\mathscr{I}$, chaque $g \in G$ définit un *-automorphisme canonique noté g_e sur la W^*-algèbre réduite $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_e$ vérifiant $g_e(eae) = eg(a)e$, $\forall a \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$, g_e est appelé *automorphisme induit* de g sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_e$; soit $G_e = \{g_e \mid g \in G\}$ on vérifie que G_e est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}\!\mathcal{l}_e)$ et que l'application $g \to g_e$ est un morphisme de groupes; le système $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}_e, G_e)$ est appelé *système induit* du système $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}; G)$ et est noté $\mathscr{F}_e$ ou $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}; G)_e$.

Soient $\mathscr{P}(G)$ l'ensemble des poinds normaux semi-finis G-invariants, $\mathscr{E}(G)$ l'ensemble des états normaux G-invariants; on a clairement $\mathscr{E}(G) \subset \mathscr{P}(G)$. Soient $N_{\mathscr{P}(G)} = \bigcap_{\varphi \in \mathscr{P}(G)} N_\varphi$, $N_{\mathscr{E}(G)} = \bigcap_{\varphi \in \mathscr{E}(G)} N_\varphi$; $N_{\mathscr{P}(G)}$ et $N_{\mathscr{E}(G)}$ sont des idéaux à gauche ultrafaiblement fermés de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$; soit $f_{\mathscr{P}(G)}$ (resp. $f_{\mathscr{E}(G)}$) le plus grand projecteur de $N_{\mathscr{P}(G)}$ (resp. $N_{\mathscr{E}(G)}$), on a (cf. [3, p. 42]):

$$N_{\mathscr{P}(G)} = \mathcal{O}\!\mathcal{l} \cdot f_{\mathscr{P}(G)} \qquad \text{et} \qquad N_{\mathscr{E}(G)} = \mathcal{O}\!\mathcal{l} \cdot f_{\mathscr{E}(G)} .$$

D'après le définition, $f_{\mathscr{P}(G)}$ (resp. $f_{\mathscr{E}(G)}$) est aussi le plus grand des projecteurs f de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ tels que $\varphi(f) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{P}(G)$ (resp. $\varphi \in \mathscr{E}(G)$). Comme $N_{\mathscr{P}(G)}$ et $N_{\mathscr{E}(G)}$ sont invariants par G et par les automorphismes intérieurs de $\mathscr{I}$, il en est de même pour $f_{\mathscr{P}(G)}$ et $f_{\mathscr{E}(G)}$ (à cause de l'unicité de ces projecteurs); autrement dit $f_{\mathscr{P}(G)}$ et $f_{\mathscr{E}(G)}$ sont invariants par G et sont dans le centre de $\mathscr{I}$.

THÉORÈME 1. *Soient $\mathscr{F}_e = (\mathcal{O}\!\mathcal{l}, G)$ un système dynamique, $\mathscr{I}$ la sous-W^*-algèbre des éléments invariants de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. Il existe d'uniques projecteurs invariants e_1, e_2, et e_3 du centre $\mathscr{I}$ de somme I tels que le système $\mathscr{F}_{e_1}$ (resp. $\mathscr{F}_{e_2}$, $\mathscr{F}_{e_3}$) soit fini (resp. semi-fini proprement infini, purement infini) et si e est un projecteur de $\mathscr{I}$ tel que le système $\mathscr{F}_e$ soit fini (resp. proprement infini, semi-fini, semi-fini proprement infini) alors $e \subset e_1$ (resp. $e \subset (I - e_1)$, $e \subset (e_1 + e_2)$, $e \subset e_2$).*

DÉMONSTRATION. Soient $e_1 = I - f_{\mathscr{E}(G)}$, $e_2 = (I - f_{\mathscr{P}(G)}) - e_1$, $e_3 = I - (e_1 + e_2)$; les propriétés et l'unicité de ces projecteurs résultent de la définition et des propriétés de $f_{\mathscr{P}(G)}$ et $f_{\mathscr{E}(G)}$.

DÉFINITION 3. Le projecteur e_1 (resp. $(I - e_1)$, $(e_1 + e_2)$, e_2) est appelé la partie finie (resp. proprement infinie, semi-finie, semi-finie proprement infinie) du système $\mathscr{F}$, c'est aussi le plus grand des projecteurs e de $\mathscr{I}$ tels que le système induit $\mathscr{F}_e$ possède la propriété correspondante.

Seconds types de systèmes dynamiques

DÉFINITION 4. Un projecteur e de $\mathfrak{A} \cap \mathscr{I}'$ est appelé un *G-atome* (ou un $\mathscr{I}$-atome) si $\mathfrak{A}_e = \mathscr{I}_e$; le système $(\mathfrak{A}; G)$ est dit *discret* si tout projecteur e du centre de $\mathfrak{A}$ majore un G-atome non nul; il est dit *continue* s'il n'existe aucun G-atome non nul.

PROPOSITION 1. *Soit $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}; G)$ un système dynamique*

(a) *$\mathscr{F}$ est discret si et seulement s'il existe un G-atome dont le $\mathscr{Z}(\mathfrak{A})^G$-support soit I.*

(b) *Il existe deux uniques projecteurs invariants e_d et e_c de somme I du centre de $\mathfrak{A}$ tels que le système induit $\mathscr{F}_{e_d}$ (resp. $\mathscr{F}_{e_c}$) soit discret (resp. continu); e_d (resp. e_c) est le plus grand des projecteurs e de $\mathfrak{A}^G$ (resp. de $\mathscr{Z}(\mathfrak{A}_c{}^G)$ tels que le système induit $\mathscr{F}_e$ soit discret (resp. continu).*

Démonstration. Laissée au soin du lecteur.

3. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KOVÁCS ET SZÜCS

Généralisation du théorème de Kovács et Szücs

Nous allons montrer l'existence et l'unicité d'une projection positive normale associée à un système dynamique quelconque qui généralise l'espérance conditionnelle de Kovács et Szücs associée à un système fini (cf. [6]).

THÉORÈME 1. (*Forme générale du théorème de Kovács et Szücs*). *Soient $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}, G)$ un système dynamique, $\mathscr{I}$ la sous-W^*-algèbre des éléments invariants de $\mathfrak{A}$. Il existe une unique application E^G de $\mathfrak{A}$ dans $\mathscr{I}$ telle que*

(i) *E^G est linéaire, positive, ultrafaiblement continue et $E^G \cdot E^G = E^G$.*

(ii) *$E^G(bab') = bE^G(a)\, b', \forall b, b' \in \mathscr{I}, a \in \mathfrak{A}$.*

(iii) *$E^G \circ g = E^G, \forall g \in G$.*

(iv) *Si $\varphi \in \mathfrak{A}_*{}^G$, alors $(\varphi\,|_{\mathscr{I}})_0 E^G = \varphi$.*

Si E' est une application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathscr{I}$ vérifiant (i), (ii), *et* (iii), *alors*

$E'(I) \subset E^G(I)$ et $E' = E'(I)$. E^G(les éléments $E'(I)$ et $E^G(I)$ sont des projecteurs du centre de $\mathscr{I}$ d'après (ii)); *$E^G(I)$ est la partie finie de $\mathscr{F}$.*

L'application E^G est fidèle si et seulement si $E^G(I) = I$ (ou encore si le système $\mathscr{F}$ est fini); dans ce cas E^G est unique pour (i), (ii), (iii), *et $E^G(I) = I$.*

Démontrons d'abord quelques lemmes préliminaires.

LEMME 1. *Soient $\varphi \in \mathfrak{A}_*{}^G$, $\varphi = |\varphi| u$ sa décomposition polaire. Alors:*

$$|\varphi| \in \mathfrak{A}_*{}^G, \quad u \in \mathscr{I} \qquad et \qquad \|\varphi\| = \|\varphi|_{\mathscr{I}}\|.$$

Démonstration du lemme. Comme $\varphi = g\varphi = (g|\varphi|)(gu)$, l'unicité de la décomposition polaire implique $g|\varphi| = |\varphi|$ et $gu = u$, $\forall g \in G$; de plus comme $|\varphi| = \varphi u^*$ (cf. [3]) on a

$$\|\varphi\| = \| |\varphi| \| = |\varphi|(I) = \varphi(u^*) = (\varphi|_{\mathscr{I}})(u^*) \leqslant \|\varphi|_{\mathscr{I}}\|.$$

L'inégalité inverse $\|\varphi|_{\mathscr{I}}\| \leqslant \|\varphi\|$ étant évidente, le lemme est démontré. Q.E.D.

LEMME 2. *Soient φ, ψ deux états normaux de $\mathfrak{A}$, on suppose que ψ est G-invariant et $\varphi|_{\mathscr{I}} = \psi|_{\mathscr{I}}$. Alors* Supp $\varphi \subset$ Supp ψ.

Démonstration du lemme. Comme ψ est G-invariant, il en est de même pour son support, donc

$$\varphi(\mathrm{Supp}\,\psi) = \psi(\mathrm{Supp}\,\psi) = 1.$$

Cela implique Supp $\varphi \subset$ Supp ψ. Q.E.D.

Démonstration du théorème. (1) D'après le lemme 1, l'application linéaire $\varphi \to \varphi|_{\mathscr{I}}$ est une isométrie respectant l'ordre de $(\mathfrak{A}_*)^G$ sur $(\mathfrak{A}_*)^G|_{\mathscr{I}}$, comme $\mathfrak{A}_*{}^G$ est un espace vectoriel fermé en norme, il en est de même pour $\mathfrak{A}_*{}^G|_{\mathscr{I}}$; de plus si $\varphi \in \mathfrak{A}_*{}^G|_{\mathscr{I}}$ et $b \in \mathscr{I}$, alors $\varphi(b \cdot b^*) \in \mathfrak{A}_*{}^G|_{\mathscr{I}}$, cet ensemble est un *idéal d'ordre* de $\mathscr{I}_*$ au sens d'Effros (cf. [5]), il existe donc un projecteur e du centre de $\mathscr{I}$ tel que

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_*{}^G|_{\mathscr{I}} &= (\mathscr{I}_e)_* \\ &= \{\varphi \in \mathscr{I}_* / \mathrm{Supp}\,|\varphi| \subset e\}.\end{aligned}$$

Soit T l'isométrie inverse de $(\mathscr{I}_e)_* = \mathfrak{A}_*{}^G|_{\mathscr{I}}$ sur $\mathfrak{A}_*{}^G \subset \mathfrak{A}_*$, soit E^G la transposée de T appliquant $\mathfrak{A}$ sur $\mathscr{I}_e$. Comme T est linéaire, positive, $gT = T$, $\forall g \in G$ et $T(\varphi(b \cdot b^*) = (T\varphi)(b \cdot b')$ $\forall \varphi \in (\mathscr{I}_e)_*$,

$\forall b, b' \in \mathscr{I}$, les propriétés de E^G en résultent; l'unicité de E^G résulte de (iv) et du lemme 1.

(2) Par construction, on a $E^G(I) = e$ et $E^G = E^G(I) \cdot E^G$.

(3) Soit E' une application, de $\mathfrak{A}$ dans $\mathscr{I}$ vérifiant (i), (ii), et (iii),s oit ${}^{E'}\mathfrak{A}_* = \{\varphi \in \mathfrak{A}_* / (\varphi\,|_{\mathscr{I}})_0\, E' = \varphi\}$, on vérifie que ${}^{E'}\mathfrak{A}_* \subset \mathfrak{A}_*{}^G$ et que ${}^{E'}\mathfrak{A}_*\,|_{\mathscr{I}}$ est un idéal d'ordre de $\mathscr{I}_*$ contenu dans $(\mathscr{I}_e)_* = \mathfrak{A}_*{}^G\,|_{\mathscr{I}}$, soit e' le projecteur du centre de $\mathscr{I}$ tel que

$${}^{E'}\mathfrak{A}_*\,|_{\mathscr{I}} = (\mathscr{I}_{e'})_* \,.$$

Comme précédemment on a $E'(I) = e'$; considérons l'application $e' \cdot E^G$, pour tout $\varphi \in \mathscr{I}_*$ on a

$$\varphi_0(e'E^G)\,|_{\mathscr{I}} = \varphi_0 E'\,|_{\mathscr{I}} \,.$$

Comme $\varphi_0(e'E^G)$ et $\varphi_0 E'$ sont dans $\mathfrak{A}_*{}^G$, le lemme 1 implique

$$\varphi_0(e'E^G) = \varphi_0 E', \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathscr{I}_* \,.$$

Donc $E' = e'E^G$ ou $E' = E'(I)\, E^G$.

(4) Supposons E^G fidèle, alors $E^G(I - e) = e - e = 0$, donc $I = e = E^G(I)$.

(5) Réciproquement si $E^G(I) = I$, soient $a \in \mathfrak{A}^+$, $a \neq 0$, φ un état normal de $\mathfrak{A}$ tel que $\varphi(a) \neq 0$, soit $\psi = (\varphi\,|_{\mathscr{I}})_0 E^G$, ψ est un *état* normal G-invariant et $\varphi\,|_{\mathscr{I}} = \psi\,|_{\mathscr{I}}$, donc d'après le lemme 2 on a $\psi(E^G a) = \psi(a) \neq 0$; E^G est fidèle.

(6) Le reste du théorème découle de ce qui procède. Q.E.D.

Propriétés des formes linéaires ultrafaiblement continues invariantes

PROPOSITION 1. *Soient* $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}; G)$ *un système dynamique,* $e = e = E^G(I)$. *Alors*:

(1) *L'application* $\varphi \to \varphi\,|_{\mathscr{I}_e}$ *est une isométrie respectant l'ordre de* $\mathfrak{A}_*{}^G$ *sur* $(\mathscr{I}_e)_*$.

(2) *Soit* $\varphi \in \mathfrak{A}_*{}^G$, *les éléments de la décomposition polaire de* φ *sont G-invariants.*

(3) *Si* $\varphi \in \mathfrak{A}_*{}^G$, *ses parties réelle et imaginaire sont encore dans* $\mathfrak{A}_*{}^G$.

(4) *Si* $\varphi \in \mathfrak{A}_*{}^G$, φ *réelle*; *ses parties positive et négative sont encore dans* $\mathfrak{A}_*{}^G$.

(5) $\mathfrak{A}_*{}^G = \{\varphi \in \mathfrak{A}_* \mid (\varphi\,|_{\mathscr{I}})_0\, E^G = \varphi\}$.

Démonstration. Les propriétés (1) et (5) ont été établies au cours de la démonstration du théorème 1. La propriété (2) correspond au lemme 1, les autres en découlent. Q.E.D.

La projection E^G et les extensions des systèmes dynamiques

LEMME 3. *Soient $(\mathcal{A}; H)$ un système dynamique, E^H la projection canonique associée, $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ tel que $g^{-1}Hg = H$. Alors $g\mathcal{I}_H = \mathcal{I}_H$ et $g^{-1}E^H g = E^H$.*

Démonstration. Laissée au soin du lecteur.

THÉORÈME 2. *Soient $(\mathcal{A}; G)$ un système dynamique,*

$$1_G = G_{n+1} \subset G_n \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 = G$$

une suite finie de sous-groupes de G tels que G_{k+1} soit distingué dans G_k, $k = 1,..., n$; on a alors les systèmes dynamiques canoniques $(\mathcal{I}_{G_{k+1}}\,;\, G_k/G_{k+1})$ et

$$E^G = E_0^{G/G_1} E_0^{G_1/G_2} \cdots E^{G_{n-1}/G_n}.$$

Démonstration. On démontre par récurrence sur n que le second membre de l'égalité possède les propriétés caractérisant E^G.

La projection E^G et les systèmes induits

PROPOSITION 2. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}; G)$ un système dynamique, p un projecteur de $\mathcal{I}$, E^{G_p} la projection canonique associée au système induit $\mathcal{F}_p = (\mathcal{A}_p\,;\, G_p)$. Alors*

$$E^{G_p} = E^G\,|_{\mathcal{A}_p}.$$

Démonstration. On vérifie que $E^G\,|_{\mathcal{A}_p}$ satisfait les propriétés caractérisant E^{G_p} données par le théorème 1.

Propriétés des poids normaux invariants

LEMME 4. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}; G)$ un système dynamique, ψ un poids normal semi-fini invariant dont la restriction à $\mathcal{I}^+$ est semi-finie. Alors:*

$$\psi = (\psi\,|_{\mathcal{I}^+})_0 E^G$$

$$\mathrm{Supp}\,\psi \subset e$$

où $e = E^G(I)$ *désigne la partie finie de $\mathcal{F}$.*

Démonstration, Soit p le support de ψ, comme ψ est G-invariant, il en est de même pour p; on considère le système induit $\mathscr{F}_p = (\mathfrak{A}_p\,;\, G_p)$, la restriction $\psi_p = \psi\,|_{\mathfrak{A}_p^+}$ est un poids normal semi-fini invariant et fidèle et la restriction de ψ_p à $\mathscr{I}_p{}^+$ est semi-finie. Soit ϕ l'espérance conditionnelle de $\mathfrak{A}_p$ sur $\mathscr{I}_p$ associée à ψ_p (cf. [2, 8]); on a $\phi_0 g = \phi$, $\forall g \in G$, et $\phi(p) = p$ le système induit $\mathscr{F}_p$ est fini. D'après la proposition 2 et le théorème 1, on a

$$\phi = E^G\,|_{\mathfrak{A}_p}.$$

Donc

$$\psi(a) = \psi_p(pap) = (\psi_p\,|_{\mathscr{I}_p^+})_0\phi(pap) = \psi_0 E^G(pap) = \psi(p(E^G a)p) = \psi(E^G a)$$

pour tout $a \in \mathfrak{A}^+$, il en résulte que $\psi = (\psi\,|_{\mathscr{I}^+})_0 E^G$. La relation Supp $\psi \subset e$ résulte de la proposition 2. Q.E.D.

LEMME 5. *Soient $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}; G)$ un système dynamique, φ et ψ deux poids normaux de $\mathfrak{A}^+$, on suppose que ψ est G-invariant et $\varphi\,|_{\mathscr{I}^+} = \psi\,|_{\mathscr{I}^+}$. Alors* Supp $\varphi \subset$ Supp ψ.

Démonstration. Soit p le support de ψ, soit $q = I - p$; comme ψ est invariant, il en est de même pour p et q, on a alors

$$\varphi(q) = \psi(q) = 0$$

donc Supp $\varphi \subset$ Supp ψ. Q.E.D.

LEMME 6. *Soient $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}; G)$ un système fini, ψ un poids normal invariant, a un élément de $\mathfrak{A}^+$ vérifiant $\psi(a) < \infty$. Alors l'enveloppe convexe ultrafaiblement fermée K_{Ga} des ga, $g \in G$, est contenue dans $\mathfrak{A}_\psi{}^+$. Plus précisément, on a*

$$\psi(b) \leqslant \psi(a) < \infty, \qquad \forall b \in K_{Ga}.$$

En particulier $\psi(E^G a) \leqslant \psi(a) < \infty$.

Démonstration. Comme ψ est ultrafaiblement semi-continu inférieurement et invariant; l'ensemble $K = \{x \in \mathfrak{A}^+ / \|x\| \leqslant \|a\|, \psi(x) \leqslant \psi(a)\}$ est un convexe ultrafaiblement fermé contenant K_{Ga}, il contient en particulier $E^G a$ d'après [4] et [6]. Q.E.D.

TÉORÈME 3. *Soient $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}; G)$ un système dynamique, ψ un poids normal semi-fini invariant. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le poids $(\psi\,|_{\mathscr{I}^+})$ est semi-fini.*

(ii) $\psi = (\psi\,|_{\mathscr{I}^+})_0 E^G$.

(iii) Supp $\psi \subset e$, *où* $e = E^G(I)$ *est la partie finie de* $\mathscr{F}$.

Les applications $\psi \to \varphi = \psi\,|_{\mathscr{I}^+}$ *et* $\varphi \to \psi = \varphi_0 E^G$ *réalisent une bijection positivement linéaire respectant l'ordre de l'ensemble des poids normaux semi-finis invariants* ψ *dont la restriction à* $\mathscr{I}^+$ *est semi-finie et l'ensemble des poids normaux semi-finis sur* $\mathscr{I}_e^+$; *en particulier si* $\mathscr{F}$ *est fini tout poids normal semi-fini invariant est automatiquement semi-fini sur* $\mathscr{I}^+$ *et se factorise par* E^G.

Démonstration. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) résultent du lemme 4; montrons que (iii) implique (i): en se restreignant éventuellement au système induit $\mathscr{F}_e$ on peut supposer que $\mathscr{F}$ est fini; soit $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathfrak{A}_\psi{}^+$ convergeant faiblement vers I (cf. [1, 2],) comme E^G est ultrafaiblement continu, on a

$$E^G(x_\alpha) \nearrow I \qquad \text{ultrafaiblement,}$$

$$\psi(E^G x_\alpha) \leqslant \psi(x_\alpha) < \infty, \qquad \forall \alpha \in A \quad \text{d'après le lemme 6.}$$

Il en résulte (cf. [1, 2]) que $\psi\,|_{\mathscr{I}^+}$ est semi-fini. La dernière assertion résulte de ce qui précède. Q.E.D.

Nous nous intéressons maintenant aux systèmes dynamiques particuliers $(\mathfrak{A}; G)$ où G est un sous-groupe du groupe Int$(\mathfrak{A})$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{A}$.

THÉORÈME 4. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une* W^**-algèbre,* $\mathscr{U}_0$ *un sous-groupe de* $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$, $G_0 = \{i_u / u \in \mathscr{U}_0\}$ φ *un poids normal semi-fini sur* $\mathfrak{A}$; *on suppose que* $\mathscr{U}_0$ *engendre* $\mathfrak{A}$. *Pour que* φ *soit une trace il faut et il suffit que* φ *soit* G_0*-invariant. Il en résulte que* $\mathfrak{A}$ *est finie (resp. semi-finie, proprement infinie, purement infinie, discrète, continue) si et seulement si le système* $(\mathfrak{A}; G_0)$ *possède la propriété correspondante.*

Montrons d'abord une lemme préliminaire.

LEMME 7. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une* W^**-algèbre,* φ *un poids normal semi-fini fidèle,* $\{\sigma_t{}^\varphi\}_{t\in\mathbb{R}}$ *le groupe des automorphismes modulaires associés à* φ, u *un élément de* $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$. *Alors* φ *est invariant par* i_u *si et seulement si* u *est invariant par le groupe* σ^φ.

Démonstration du lemme. D'après [2], u est invariant par σ^φ si et seulement si

(1) $u\mathscr{M}_\varphi \subset \mathscr{M}_\varphi$, $\mathscr{M}_\varphi u \subset \mathscr{M}_\varphi$, et $\varphi(ux) = \varphi(xu)$, $\forall x \in \mathscr{M}_\varphi$.

(a) Supposons que u est invariant par σ^φ, il en est de même pour u^*; d'après

(1) pour tout $x \in \mathcal{M}_\varphi$:

$$\varphi(uxu^*) = \varphi(u(xu^*)) = \varphi((xu^*)u) = \varphi(x).$$

Si $x \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}^+$ et $\varphi(x) = \infty$, la relation (1) implique que $uxu^* \notin \mathcal{M}_\varphi{}^+$ et par suite $\varphi(uxu^*) = \infty = \varphi(x)$.

Donc φ est i_u invariant.

(b) Réciproquement supposons que φ est invariant par i_u, il est aussi invariant par $i_{u^*} = i_u^{-1}$; on en déduit immédiatement

$$u\mathcal{N}_\varphi u^* = \mathcal{N}_\varphi \qquad \text{et} \qquad u^*\mathcal{N}_\varphi u = \mathcal{N}_\varphi .$$

Comme $\mathcal{N}_\varphi$ est un idéal à gauche, en multipliant par u ou u^* les inégalités précédentes, on obtient

$$\mathcal{N}_\varphi u^* = u^*\mathcal{N}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_\varphi u = u\mathcal{N}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi ;$$

comme $\mathcal{M}_\varphi = (\mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi{}^*)^2$, on en déduit

$$u\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_\varphi u = \mathcal{M}_\varphi = u^*\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{M}_\varphi u^*.$$

Soit $x \in \mathcal{M}_\varphi$

$$\varphi(ux) = \varphi(u(xu)u^*) = \varphi(i_u(xu)) = \varphi(xu).$$

Donc u est σ^φ-invariant et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème. Il est clair que si φ est une trace il est G_0-invariant; Réciproquement soit φ un poids normal semi-fini $G_{\mathcal{U}_0}$-invariant, soit p le support de φ, on a

$$upu^* = p \qquad \text{ou} \qquad up = pu, \qquad \forall u \in \mathcal{U}_0 ,$$

comme $\mathcal{U}_0$ engendre $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, p est dans le cenrte de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, on peut donc supposer que φ est fidèle (en sous restreignant si nécessaire à $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_p$ car $p\mathcal{U}_0 p$ engendre encore $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_p$); d'après le lemme 7

$$\sigma_t{}^\varphi u = u, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \forall u \in \mathcal{U}_0 .$$

Comme $\mathcal{U}_0$ engendre $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, $\sigma_t{}^\varphi a = a$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$, donc d'après le lemme 7:

$$\varphi(uau^*) = \varphi(a), \qquad \forall a \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}^+, \qquad \forall u \in \mathcal{U}(\mathcal{O}\!\mathcal{l})$$

φ est bien une trace.

La deuxième partie du théorème résulte de ce qui précède et du fait que l'ensemble des éléments G_0-invariants de $\mathcal{A}$ est exactement

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U}_0' = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \text{Centre}(\mathcal{A})$$

puisque $\mathcal{U}_0$ engendre $\mathcal{A}$. Q.E.D.

COROLLAIRE. *Soient G un groupe topologique, U une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, G_0 un sous-groupe dense de G, $\mathcal{A}$ la W^*-algèbre engendrée par $U(G)$,*

$$\tilde{G}_0 = \{i_u \in \text{Int}(\mathcal{A}) / u \in U(G_0)\}.$$

Alors $\mathcal{A}$ est finie (resp. semi-finie, proprement infinie, purement infinie, discrète, continue) si et seulement si le système $(\mathcal{A}, \tilde{G}_0)$ possède la propriété correspondante. En particulier si G est séparable on peut prendre G_0 dénombrable.

Types des extensions des systèmes dynamiques

THÉORÈME 5. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}; G)$ un système dynamique, H un sous-groupe distingué de G; on suppose que le système $(\mathcal{A}; H)$ est fini; soit ψ un poids normal semi-fini G-invariant de $\mathcal{A}^+$; alors $\varphi = \psi\,|_{\mathcal{I}_H^+}$ est un poids normal semi-fini G/H-invariant de $\mathcal{I}_H{}^+$ et l'on a $\psi = \psi_0 E^H$; réciproquement si φ est un poids normal semi-fini G/H-invariant de $\mathcal{I}_H{}^+$, alors le poids normal $\psi = \varphi_0 E^H$ est semi-fini et G-invariant. Il y a donc une bijection positivement linéaire entre l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des poids normaux semi-finis G-invariants de $\mathcal{A}^+$ et l'ensemble des poids normaux semi-finis G/H-invariants de $\mathcal{I}_H{}^+$; cette bijection est donnée par*

$$\psi = \varphi_0 E^H, \qquad \varphi = \psi\,|_{\mathcal{I}_H^+}.$$

Il en résulte que le système $\mathcal{F}$ est fini (resp. proprement infini, semi-fini, purement infini) si et seuelement si le système $(\mathcal{I}_H\,; G/H)$ possède la propriété correspondante.

Démonstration. Soit ψ un poids normal semi-fini G-invariant de $\mathcal{A}^+$, ψ est donc H-invariant; d'après le théorème 3, $\varphi = \psi\,|_{\mathcal{I}_H^+}$ est un poids normal semi-fini et on vérifie immédiatement que φ est G/H-invariant.

Réciproquement, soit φ un poids normal semi-fini sur $\mathcal{I}_H{}^+$ invariant par G/H; soit $\psi = \varphi_0 E^H$, il est clair que ψ est un poids normal semi-fini de $\mathfrak{A}^+$; pour tous $a \in \mathfrak{A}^+$, $g \in G$:

$$\begin{aligned}
\psi(ga) &= \varphi_0 E^H(ga) \\
&= \varphi(gE^H(a)) \qquad \text{d'après le lemme 3} \\
&= \varphi(E^H a) \\
&= \psi(a).
\end{aligned}$$

Donc ψ est G-invariant; le reste du théorème en découle. Q.E.D.

COROLLAIRE 1. *Soient $\mathfrak{A}$ une W^*-algèbre, G un groupe topologique, K un sous-groupe compact distingué de G (a.e. G localement compact connexe, K compact tel que G/K soit un groupe de Lie réel) α un morphisme continue de G dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. *Alors le système $(\mathfrak{A}; \alpha(G))$ est fini (resp. semi-fini, proprement infini, purement infini) si et seulement si le sysètme $(\mathscr{I}_{\alpha(K)}\,; \alpha(G)/\alpha(K))$ possède la propriété correspondante.*

Démonstration. On remarque que le système $(\mathfrak{A}; \alpha(K))$ est fini, le corollaire est immédiat.

COROLLAIRE 2. *Soient $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ une W^*-pair ($\mathfrak{A}$ une W^*-algèbre, $\mathfrak{A}_0$ une sous W^*-algèbre abélienne maximale régulière de $\mathfrak{A}$) $\mathscr{U}_0$ un sous-groupe de $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ tel que $u\mathfrak{A}_0 u^* = \mathfrak{A}_0$, $\forall u \in \mathscr{U}_0$ et on suppose que $\mathscr{U}_0$ et $\mathfrak{A}_0$ engendrent $\mathscr{A}$ et que le système $(\mathscr{A}; G_{\mathfrak{A}_0})$ est fini; on considère le système commutatif $\mathscr{F} = (\mathfrak{A}_0\,; G_{\mathscr{U}_0}|_{\mathfrak{A}_0})$. La W^*-algèbre $\mathfrak{A}$ est finie (resp. proprement infinie, semi-finie, purement infinie) si et seulement si le système $\mathscr{F}$ est fini (resp. proprement infini, semi-fini, purement infini).*

Démonstration. On observe que le système $(\mathfrak{A}; G_{\mathscr{U}_0})$ est une extension finie du système $\mathscr{F}$. Q.E.D.

Remarques. Le corollaire 2 contient comme cas particuliers les théorèmes de von Neumann et de Krieger sur les W^*-algèbres associées aux systèmes dynamiques commutatifs (cf. [3, 7]).

4. QUELQUES APPLICATIONS; NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAKESAKI–TOMIYAMA SUR LES W^*-ALGÈBRES FINIES

PROPOSITION 1. *Soient $\mathfrak{A}$ une W^*-algèbre,* $\mathrm{Int}(\mathfrak{A})$ *le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathfrak{A}$ est finie (ou encore le système $(\mathfrak{A}; \mathrm{Int}(\mathfrak{A}))$ est fini).*
(ii) *Le système $(\mathfrak{A}; (g^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ est fini pour tout $g \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la definition des systèmes finis. Supposons que $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ n'est pas finie, il existe alors (cf. [3]) une suite orthogonale de projecteurs $\{e_n\}_{n\in N}$ de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ telle que

$$e_0 \neq 0, \qquad e_0 \sim e_n\,, \qquad \forall n \in N.$$

Soient u_n une isométrie partielle de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ vérifiant $u_n{}^*u_n = e_0$ et $u_n u_n{}^* = e_n$ $n \in N$, $u_0 = e_0$ et $f = I - \sum_n e_n$.

On définit alors l'opérateur u:

$$u = f + u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-2}u_{2k}^* + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1}u_{2k-1}^*\,.$$

On vérifie que u est un opérateur unitaire de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ et que l'automorphisme intérieur i_u $(i_u(\cdot) = u \cdot u^*)$ n'admet aucun état normal invariant φ vérifiant $0 \neq \varphi(e_0)$ $(=\varphi(e_n), \forall n \in N)$. Q.E.D.

COROLLAIRE (Takesaki et Tomiyama). *Soit $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ une W^*-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ est finie.*

(ii) *Pour toute sous-W^*-algèbre abélienne maximale $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, il existe une espérance conditionelle de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ sur $\mathcal{M}$.*

(iii)′ *Le système $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}, G_{\mathcal{M}})$ est fini pour toute sous-W^*-algèbre abélienne maximale $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$; $G_{\mathcal{M}}$ désignant le groupe des automorphismes intérieurs associés aux unitaires de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. L'équivalence entre (iii) et (iii)′ est évidente d'après le théorème de Kovács et Szücs; en utilisant la définition des systèmes finis on démontre immédiatement (i) $\Rightarrow$ (iii)′ $\Rightarrow$ (ii); d'où le résultat. Q.E.D.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ une W^*-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ est proprement infinie.*

(ii) *Le système $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}; \{g^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ est proprement infini pour un g de* $\mathrm{Int}(\mathcal{O}\!\mathcal{l})$.

Démonstration. Si $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ est proprement infinie, alors dans la démonstration de la proposition 1 on peut supposer $I = \sum_{n\in N} e_n$, le système $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}; \{i_u{}^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ est proprement infini; soit $\mathcal{M}$ une sous-W^*-algèbre abélienne maximale de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ contenant u, le système $(\mathcal{O}\!\mathcal{l}; G_{\mathcal{M}})$ est proprement infini d'où l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii); la réciproque est immédiate. Q.E.D.

On en déduit, comme pour la proposition 1, le corollaire.

COROLLAIRE (cf. [9]). *Une W^*-algèbre $\mathfrak{A}$ est proprement infinie si et seulement s'il existe une sous W^*-algèbre abélienne maximale $\mathcal{M}$ complètement "nonsmooth" (cf. [9]) (i.e., si le système ($\mathfrak{A}$; $G_{\mathcal{M}}$) est proprement infini.)*

BIBLIOGRAPHIE

1. F. COMBES, Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France* **99** (1971), 73–112.
2. F. COMBES, Poids et espérances conditionnelles; Séminaire "Sur les systèmes dynamiques non-commutatifs" (Dang Ngoc–Guichardet) Paris 1972–1973, à paraître.
3. J. DIXMIER, "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien," Gauthier-Villars, Paris, 1969.
4. S. DOPLICHER, D. KASTLER, ET E. STØRMER, Invariant states and asymptotic Abelianness, *J. Functional Analysis* **3** (1969), 419–434.
5. E. G. EFFROS, Order ideals in a C^*-algebra and its dual, *Duke Math. J.* **30** (1963), 391–411.
6. I. KOVÁCS ET J. SZÜCS, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta Sci. Math.* **27** (1967), 233–246.
7. W. KRIEGER, On constructing non-*-isomorphic hyperfinite factors of type III, *J. Functional Analysis* **6** (1970), 97–109.
8. M. TAKESAKI, Conditional expectations in von Neumann algebras, *J. Functional Analysis* **9** (1972), 306–321.
9. J. TOMIYAMA, Some types of maximal Abelian subalgebras, *J. Functional Analysis* **10** (1972), 373–386.